Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 9

Definition 1 *Eine Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, falls für jedes $\varepsilon > 0$, jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Wahl $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Satz 1 *Jede absolut stetige Funktion F ist fast überall differenzierbar. Es sei I die Menge aller Punkte, wo F differenzierbar ist und*

$$p(x) = \begin{cases} F'(x), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}.$$

Dann ist p auf jedem Intervall $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$F(b) - F(a) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(x) p(x) \mathrm{d}x, \quad a < b.$$

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es sei $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $F_\mu(t) := \mu((-\infty, t])$ die Verteilungsfunktion von μ. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

(a) μ hat eine Dichte.

(b) F_μ ist absolut stetig.

Hinweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Zeigen Sie, dass für jede integrierbare Funktion $q \geq 0$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad m(A) < \delta \Longrightarrow \int_A q(x) \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Folgern Sie daraus die Behauptung.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Benutzen Sie obigen Satz um einen Kandidaten für die Dichte zu bekommen. Zeigen Sie zunächst, dass diese Funktion nicht-negativ ist. Durch geeigneten Grenzübergang lässt sich dann die Behauptung zeigen.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit uniformer Verteilung auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$Y_n := (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$$

fast sicher konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = 2^n) = 2^{-n}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2^{-n}.$$

Zeigen Sie, dass $Y_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ fast sicher konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Es gebe eine weitere Zufallsvariable Y mit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow Y, \quad n \to \infty$$

fast sicher. Zeigen Sie, dass $X_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $Y = \mathbb{E}(X_1)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\frac{X_n}{n} \longrightarrow 0$ fast sicher und folgern Sie daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) < \infty.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq n)$$

und schliessen Sie daraus die Behauptung.